

**Федеральное государственное образовательное  
бюджетное учреждение высшего образования  
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ  
ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»  
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения  
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной  
и методической работе

\_\_\_\_\_ Е.А. Каменева

01.12.2022 г.

**Рябов П. Е.**

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

**Рабочая программа дисциплины**

для студентов, обучающихся по направлению подготовки

01.03.02 – Прикладная математика и информатика,

ОП «Анализ данных»,

Профиль: «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»

*Рекомендовано Ученым советом  
Факультета информационных технологий и анализа больших данных  
(протокол № 26 от 24.11.2022 г.)*

*Одобрено Советом учебно-научного  
Департамента анализа данных и машинного обучения  
(протокол № 5 от 21.11.2022 г.)*

**Москва 2022**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Наименование дисциплины .....	3
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижений и планируемых результатов обучения по дисциплине .....	3
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы .....	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся .....	5
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий.....	5
5.1. Содержание дисциплины.....	5
5.2. Учебно-тематический план .....	11
5.3. Содержание семинаров, практических занятий.....	11
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....	16
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы .....	16
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю .....	17
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине .....	30
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....	58
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.....	58
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	59
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем .....	59
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	60

## 1. Наименование дисциплины

«Теория вероятностей и математическая статистика».

## 2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижений и планируемых результатов обучения по дисциплине

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» обеспечивает формирование следующих компетенций: ПКН-1, ПКН-2

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
ПКН-1	Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области математики и компьютерных наук, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям	<p>1. Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно-исследовательских задач.</p> <p>2. Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов.</p>	<p><b>Знать</b> основные факты, концепции и принципы теории вероятностей и математической статистики;</p> <p><b>Уметь</b> строго доказывать математические утверждения теории вероятностей и математической статистики, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах;</p> <p><b>Знать</b> язык теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач с использованием математических методов;</p> <p><b>Уметь</b> применять знания теории вероятностей и математической статистики для решения практических задач; выбирать и применять математические методы и методы моделирования необходимые для решения поставленных задач</p>

ПКН-2	Способен с помощью математической модели решать поставленную теоретическую или прикладную задачу, реализовывая алгоритм решения в виде программного модуля	<p>1. Демонстрирует знание базовых математических моделей, применяемых в различных предметных областях.</p> <p>2. Адаптирует и применяет существующие математические модели для решения поставленной прикладной или теоретической задачи.</p> <p>3. Владеет методологией математического моделирования для решения профессиональных задач.</p>	<p><b>Знать</b> основные понятия теории вероятностей и математической статистики; методики расчетов, используемые при анализе данных; вероятностные и статистические методы.</p> <p><b>Уметь</b> использовать инструменты описательной статистики и визуализации данных, вероятностные и статистические методы для решения профессиональных задач.</p> <p><b>Знать</b> вероятностные и статистические модели в области прикладного машинного обучения;</p> <p><b>Уметь</b> модифицировать математические модели в области прикладного машинного обучения;</p> <p><b>Знать</b> навыки решения задач в области экономики и финансов с использованием инструментария <i>Microsoft Excel, R, Python (Jupyter Notebook), Wolfram Mathematica, MATLAB</i>.</p> <p><b>Уметь</b> использовать инструментарий <i>Microsoft Excel, R, Python (Jupyter Notebook), Wolfram Mathematica, MATLAB</i> для решения задач в области прикладного машинного обучения.</p>
-------	--	--	--

### 3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к Циклу математики и информатики по направлению подготовки 01.03.02 - Прикладная математика и информатика, ОП «Прикладное машинное обучение» Профиль «Прикладное машинное обучение».

Изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» базируется на знаниях, полученных в рамках изучения математических дисциплин, входящих в ОП бакалавра по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»: Математический анализ, Алгебра и геометрия, Дискретная математика, Алгоритмы и структуры данных в языке *Python*.

**4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся**

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 2 (в часах)	Семестр 3 (в часах)
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	<b>9/324</b>	<b>144</b>	<b>180</b>
<b>Контактная работа - Аудиторные занятия</b>	<b>136</b>	<b>68</b>	<b>68</b>
<i>Лекции</i>	<i>32</i>	<i>16</i>	<i>16</i>
<i>Семинары, практические занятия</i>	<i>104</i>	<i>52</i>	<i>52</i>
<b>Самостоятельная работа</b>	<b>188</b>	<b>76</b>	<b>112</b>
Вид текущего контроля	Контрольные работы	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Зачет, экзамен	Зачет	Экзамен

**5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий**

#### **5.1. Содержание дисциплины**

### **Теория вероятностей**

#### **Раздел 1. Вероятности событий**

Операции над случайными событиями, связанными с опытом. Геометрические вероятности. Статистическое «определение» вероятности и аксиоматика А. Н. Колмогорова. Вероятностное пространство как модель случайного эксперимента. Конечное вероятностное пространство и классический способ подсчета вероятностей. Дискретное вероятностное пространство. Реализация на *Python* стохастического эксперимента с одинаково возможными исходами (методы *random.sample*, *random.choices*).

Условные вероятности. Независимые события и правило умножения вероятностей. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Априорные и апостериорные вероятности гипотез.

Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли). Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли. Приближенные формулы Лапласа и Пуассона. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности.

## Раздел 2. Случайные величины

Случайная величина как функция на пространстве элементарных событий. Функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения. Независимость случайных величин. Функции от одной или нескольких случайных величин. Арифметические операции над случайными величинами.

Дискретная случайная величина (ДСВ) и ее закон распределения. Основные числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, ковариация и коэффициент корреляции. Математическое ожидание функции от ДСВ. Неравенство Йенсена. Использование класса *scipy.stats.rv\_discrete* для построения экземпляров распределения ДСВ.

Свойства математического ожидания, дисперсии, ковариации и коэффициента корреляции. Вычисление основных числовых характеристик распределений методами библиотек *numpy* и *scipy*.

Примеры классических дискретных распределений (биномиальное, пуассоновское, геометрическое) и вычисление их числовых характеристик. Гипергеометрический закон распределения. Полиномиальное распределение. Пуассоновость суммы независимых пуассоновских случайных величин. Производящие функции. Реализация моделей дискретных случайных величин в пакете *Jupyter Notebook*. Объекты *bernoulli*, *binom*, *poisson*, *geom*, *hypergeom* и *multinomial* библиотеки *scipy*.

Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины. Свойства функции плотности. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины. Математическое ожидание функции от абсолютно непрерывной случайной величины. Использование класса *scipy.stats.rv\_continuous* для построения экземпляров распределения непрерывных СВ.

Равномерное распределение на отрезке, треугольное распределение (распределение Симпсона), показательное (экспоненциальное) распределение, распределение Коши, распределение Лапласа, нормальное и логнормальное распределения, их числовые характеристики. Нормальность суммы независимых нормальных случайных величин. Объекты *uniform*, *triang*, *expon*, *cauchy*, *norm*, *lognorm* библиотеки *scipy*. Универсальные свойства равномерного распределения. Понятие квантильной функции.

Начальные и центральные моменты случайной величины. Производящая функция моментов. Асимметрия и эксцесс. Мода, медиана и квантили непрерывного распределения.

### Раздел 3. Случайные векторы

Совместное распределение случайных величин. Случайный вектор. Зависимые и независимые случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства. Одинаково распределенные случайные векторы. Связь функции распределения случайного вектора с функциями распределения его компонент.

Дискретные случайные векторы. Вероятность попадания дискретного случайного вектора в заданное множество. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора и его связь с распределениями компонент.

Абсолютно непрерывные случайные векторы. Вероятность попадания абсолютно непрерывного случайного вектора в заданное множество. Связь функции плотности распределения случайного вектора с функциями плотности его компонент. Функция плотности и независимость компонент случайного вектора. Равномерное распределение в ограниченной области в  $\mathbb{R}^n$ . Функции от случайных величин. Закон распределения суммы случайных величин. Формула свертки.

Числовые характеристики дискретных и абсолютно непрерывных случайных векторов. Математическое ожидание функции от компонент случайного вектора. Ковариационная матрица случайного вектора. Неотрицательная определенность ковариационной матрицы.

Нормальное распределение в  $\mathbb{R}^2$ . Плотность двумерного нормального распределения, приведение к каноническому виду. Нормальные случайные векторы и их свойства. Реализация моделей непрерывных случайных векторов в пакетах R, *Jupyter Notebook* (методы *multivariate\_normal* и *multivariate\_t* из библиотеки *scipy.stats*).

Условные распределения и условные плотности. Условное математическое ожидание и его свойства. Формула полного математического ожидания. Условная дисперсия. Формула полной дисперсии. Условная ковариация случайных величин  $X$  и  $Y$  относительно случайной величины  $Z$ . Формула полной ковариации.

#### **Раздел 4. Предельные теоремы теории вероятностей**

Неравенство Маркова и Чебышева. Правило «трех сигм» в общем случае. Теоремы Чебышёва и Бернулли. Последовательности случайных величин. Сходимость по вероятности и закон больших чисел. Реализация модели ЗБЧ в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) для одинаково распределенных независимых слагаемых. Применение ЦПТ. Неравенство Берри – Эссеена об оценке погрешности приближения в центральной предельной теореме. Реализация модели ЦПТ в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

### **Математическая статистика**

#### **Раздел 1. Статистика конечной совокупности**

Эмпирические характеристики признака: среднее, дисперсия, СКО, асимметрия, эксцесс, функция распределения. Эмпирическая ковариация двух признаков. Вариационный ряд, размах и эмпирическая медиана. Среднее арифметическое и дисперсия совокупности, разбитой на группы. Среднее арифметическое и дисперсия интервального распределения. Связь с характеристиками исходной совокупности. Поправка Шеппарда.

Генеральная совокупность, выборка и основные способы организации выборки. Основные выборочные характеристики и их свойства. Повторные и бес-



повторные выборки. Математическое ожидание и дисперсия выборочного среднего. Ковариация выборочных средних двух признаков. Математическое ожидание и дисперсия выборочной доли.

Использование библиотек *numpy* и *scipy.stats* для создания выборки из распределения, функции *beta*, *binomial*, *chisquare*, *exponential*, *f*, *gamma*, *geometric*, *hypergeometric*, *lognormal*, *multinomial*, *normal*, *pareto*, *poisson*, *standard\_cauchy*, *standard\_t*, *uniform* пакета *numpy.random*.

## **Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений**

Выборка из распределения. Вариационный ряд и порядковые статистики. Распределение порядковых статистик. Статистическое оценивание параметров. Точечные оценки и их свойства (несмещенность, состоятельность и эффективность). Состоятельность и сходимость по вероятности. Асимптотическая нормальность. Несмещенная оценка начального момента произвольного порядка. Выборочное среднее как эффективная оценка математического ожидания. Достаточные условия состоятельности статистической оценки. Состоятельные оценки начальных моментов. Несмещенная оценка  $s^2$  генеральной дисперсии и ее состоятельность.

Неравенство информации, метод максимального правдоподобия и метод моментов. Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Неравенство Рао – Крамера и информация Фишера. Относительная эффективность. Выборочное среднее как эффективная оценка математического ожидания нормального распределения в классе всех несмещенных оценок.

## **Раздел 3. Интервальные статистические оценки**

Интервальные оценки и доверительные области. Байесовское статистическое оценивание. Интервальные оценки параметров распределения, доверительная вероятность и точность оценки. Построения интервальных оценок методом центральной статистики. Законы распределения выборочных характеристик в нормальной генеральной совокупности. Распределения  $\chi^2$ . Стьюдента и Фи-

шера. Определения и простейшие свойства. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии. Доверительные интервалы для математического ожидания и вероятности события в случае выборки большого объема. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии. Доверительный интервал (симметричный по вероятности) для дисперсии при известном математическом ожидании. Доверительный интервал (симметричный по вероятности) для дисперсии при неизвестном математическом ожидании. Интервал предсказания. Асимптотический доверительный интервал для коэффициента корреляции  $\rho$ . Доверительный интервал для вероятности. Доверительный эллипс. Асимптотический доверительный интервал с использованием информации по Фишеру. Моделирование доверительной оценки с использованием инструментария *Jupyter Notebook*.

#### **Раздел 4. Статистическая проверка гипотез**

Статистическая проверка гипотез: основные типы гипотез и общая логическая схема статистического критерия; характеристики качества критерия. Проверка статистических гипотез. Критическая область. Мощность критерия. Отношение правдоподобия и лемма Неймана-Пирсона. Пример построения наиболее мощного критерия. Проверка гипотез об определенных значениях параметров нормальных распределений. Проверка гипотезы о равенстве средних при известной дисперсии. Проверка гипотезы о равенстве средних при неизвестной дисперсии.  $P$ -значение критерия. Определение и способ его вычисления. ROC-кривая (Receiver operating characteristic) и ее свойства. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. Критерии Бартлетта и Кокрена. Критерии согласия. Проверка гипотезы о соответствии эмпирических данных теоретическому закону с данной функцией распределения по критерию Пирсона. Проверка гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова. Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа. А/В – тестирование. Реализация моделей проверки статистических гипотез в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

## 5.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоёмкость в часах					Формы теку- щего контроля успеваемости
		Всего	Контактная работа- Аудиторная работа			Само- стоя- тельная работа	
			Общая, в т. ч.:	Лекции	Семинары, практиче- ские заня- тия		
Теория вероятностей							
1.	Вероятности собы- тий	28	16	4	12	12	Выступления у доски, домашние задания, бесе- дование по мате- риалу и обсуж- дение результа- тов
2.	Случайные величины	36	20	6	14	16	
3.	Случайные векторы	48	20	4	16	28	
4.	Предельные тео- ремы теории вероят- ностей	32	12	2	10	20	
Математическая статистика							
1.	Статистика конечной совокупности	38	12	2	10	26	Выступления у доски, домашние задания, бесе- дование по мате- риалу и обсужде- ние результатов
2.	Точечные оценки па- раметров распреде- лений	32	16	4	12	16	
3.	Интервальные стати- стические оценки	42	18	4	14	24	
4.	Статистическая про- верка гипотез	68	22	6	16	46	
	В целом по дисци- плине	324	136	32	104	188	Согласно учеб- ному плану: кон- трольные работы
	Итого в %		42	24	76	58	

## 5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисци- плины	Перечень вопросов для обсуждения на семинар- ских, практических занятиях, рекомендуемые ис- точники из разделов 8,9 (указывается раздел и по- рядковый номер источника)	Формы проведения занятий
--	--	--------------------------------

Теория вероятностей		
Раздел 1. Вероятности событий	Операции над случайными событиями, связанными с опытом. Геометрические вероятности. Статистическое «определение» вероятности и аксиоматика А.Н. Колмогорова. Вероятностное пространство как модель случайного эксперимента. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Вероятности событий	Условные вероятности. Независимые события и правило умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса вероятностей гипотез. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Вероятности событий	Независимые испытания. Схема Бернулли. Вероятность заданного числа успехов и наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли. [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Вероятности событий	Локальная и интегральная приближенные формулы Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности. Приближенные формулы Пуассона. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Случайные величины	Дискретная случайная величина и ее закон распределения. Примеры дискретных законов распределения: биномиальный, геометрический, гипергеометрический, полиномиальный, пуассоновский. Использование класса <i>scipy.stats.rv_discrete</i> . <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Случайные величины	Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии произвольной случайной величины. Неравенство Йенсена. Стандартное и среднее линейное отклонения <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Случайные величины	Ковариация и коэффициент корреляции. Производящая функция целочисленной случайной величины и числовые характеристики типичных дискретных законов. Вычисление числовых характеристик средствами <i>numpy</i> и <i>scipy</i> . Центральные и начальные моменты вероятностного распределения. Асимметрия и эксцесс. Производящая функция моментов и ее свойства. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Самотестирование. Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания. Зачет по контрольной работе.

<b>Раздел 2.</b> Случайные величины	Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность вероятности и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины. Равномерное распределение на отрезке и показательное распределение на полупрямой. Медиана и квантили непрерывного распределения. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 2.</b> Случайные величины	Нормальное распределение на прямой. Свойства нормальных случайных величин. Логарифмически нормальное распределение. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Случайные векторы	Зависимые и независимые случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства. Одинаково распределенные случайные векторы. Дискретные случайные векторы. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Случайные векторы	Абсолютно непрерывные случайные векторы. Связь функции плотности распределения случайного вектора с функциями плотности его компонент. Равномерное распределение в ограниченной области. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Случайные векторы	Условные распределения и условные плотности. Условное математическое ожидание и его свойства. Формула полного математического ожидания. Условная дисперсия. Формула полной дисперсии. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Случайные векторы	Многомерное нормальное распределение. Приведение к каноническому виду. Нормальные случайные векторы и их свойства. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Случайные векторы	Функции от случайных величин. Закон распределения суммы случайных величин. Формула свертки. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Случайные векторы	Реализация моделей непрерывных случайных векторов в пакете « <i>Jupyter Notebook</i> » (методы <code>multivariate_normal</code> и <code>multivariate_t</code> из библиотеки <code>scipy.stats</code> ). <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

<b>Раздел 4.</b> Предельные теоремы теории вероятностей	Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 4.</b> Предельные теоремы теории вероятностей	Центральная предельная теорема для одинаково распределенных независимых слагаемых. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Математическая статистика</b>		
<b>Раздел 1.</b> Статистика конечной совокупности	Эмпирические характеристики признака: среднее, дисперсия, СКО, асимметрия, эксцесс, функция распределения. Эмпирическая ковариация двух признаков. Вариационный ряд, размах и эмпирическая медиана. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 1.</b> Статистика конечной совокупности	Среднее арифметическое и дисперсия совокупности, разбитой на группы. Среднее арифметическое и дисперсия интервального распределения. Связь с характеристиками исходной совокупности. Поправка Шепарда. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 1.</b> Статистика конечной совокупности	Генеральная совокупность, выборка и основные способы организации выборки. Основные выборочные характеристики и их свойства. Повторные и бесповторные выборки. Использование пакета <i>nimpy.random</i> для создания выборки из распределения. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 2.</b> Точечные оценки параметров распределений	Выборка из распределения. Вариационный ряд и порядковые статистики. Распределение порядковых статистик. Статистическое оценивание параметров. Точечные оценки и их свойства (несмещенность, состоятельность и эффективность). Асимптотическая нормальность. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 2.</b> Точечные оценки параметров распределений	Состоятельность и сходимость по вероятности. Несмещенная оценка начального момента произвольного порядка. Выборочное среднее как эффективная оценка математического ожидания. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

<b>Раздел 2.</b> Точечные оценки параметров распределений	Достаточные условия состоятельности статистической оценки. Состоятельные оценки начальных моментов. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 2.</b> Точечные оценки параметров распределений	Метод максимального правдоподобия и метод моментов. Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность. Метод максимального правдоподобия. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Точечные оценки параметров распределений	Неравенство Рао – Крамера и информация Фишера. Эффективные по Рао – Крамера оценки. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Интервальные статистические оценки	Интервальные оценки параметров распределения, доверительная вероятность и точность оценки. Построения интервальных оценок методом центральной статистики. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Интервальные статистические оценки	Распределения хи-квадрат Стьюдента и Фишера. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 3.</b> Интервальные статистические оценки	Асимптотический доверительный интервал для коэффициента корреляции $\rho$ . Доверительный интервал для вероятности. Доверительный эллипс. Асимптотический доверительный интервал с использованием информации по Фишеру. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 4.</b> Статистическая проверка гипотез	Статистические критерии. Статистическая проверка гипотез: основные типы гипотез и общая логическая схема статистического критерия; характеристики качества критерия. ROC-кривая. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 4.</b> Статистическая проверка гипотез	Проверка гипотез об определенных значениях параметров нормальных распределений. Проверка гипотезы о равенстве средних при известной дисперсии. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

<b>Раздел 4.</b> Статистическая проверка гипотез	про-	Проверка гипотезы о равенстве средних при неизвестной дисперсии. Р-значение критерия. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.2, 9.3, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 4.</b> Статистическая проверка гипотез	про-	Проверка гипотез о виде распределения. Критерий Пирсона. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 4.</b> Статистическая проверка гипотез	про-	Проверка гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
<b>Раздел 4.</b> Статистическая проверка гипотез	про-	Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа. А/В – тестирование. <b>Рекомендуемые источники:</b> [8.1. - 8.3.; 9.1, 9.2, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

## 6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

### 6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
<b>Теория вероятностей</b>		
<b>Раздел 1.</b> Вероятности событий	Статистическое моделирование вероятности	Программирование различных вероятностных моделей с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica»
<b>Раздел 2.</b> Случайные величины	Статистическое моделирование различных распределений случайных величин	Моделирование различных распределений с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica»
<b>Раздел 3.</b> Случайные векторы	Статистическое моделирование двумерного нормального закона распределения.	Моделирование различных многомерных распределений с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica»



<b>Раздел 4.</b> Предельные теоремы теории вероятностей	Статистическое моделирование закона больших чисел и центральной предельной теоремы.	Реализация модели ЦПТ в пакетах R, Jupyter Notebook.
<b>Математическая статистика</b>		
<b>Раздел 1.</b> Статистика конечной совокупности.	Среднее арифметическое и дисперсия интервального распределения. Связь с характеристиками исходной совокупности. Поправка Шеппарда.	Эмпирические характеристики признака с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica»
<b>Раздел 2.</b> Точечные оценки параметров распределений (математическая статистика)	Метод максимального правдоподобия и метод моментов. Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность.	Численные методы нахождения оценок параметров, используемые методами максимального правдоподобия и метод моментов с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica». Метод спейсингов.
<b>Раздел 3.</b> Интервальные статистические оценки	Приближенные (асимптотические) доверительные интервалы. Доверительные интервалы для математического ожидания и вероятности события в случае выборки большого объема. Интервал предсказания.	Численные методы нахождения оценок параметров, используемые методами максимального правдоподобия и метод моментов с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica». Метод спейсингов.
<b>Раздел 4.</b> Статистическая проверка гипотез (математическая статистика)	Проверка гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова.	Реализация проверки гипотезы об однородности в пакете «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica».

## 6.1. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

### Примерные задания контрольных работ

1. Сформулируйте формулу включений-исключений для определения вероятности суммы нескольких совместных событий. Найдите вероятность того, что в перестановке из  $n$  элементов ни один элемент не стоит на своем месте.
2. Сформулируйте аксиомы теории вероятностей и на их основе докажите свойство непрерывности вероятности.

3. Дайте определение понятий «независимость событий». Какие события называются «независимыми в совокупности». Следует ли из равенства  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$  попарная независимость. Ответ обосновать.
4. Дайте определение понятий «условная вероятность», «полная группа попарно несовместных событий». Сформулируйте и докажите теоремы, утверждающие справедливость формулы полной вероятностей и формулы полной вероятностей для математического ожидания.
5. Дайте определение схемы Бернулли. Выведите формулу для определения вероятности  $P_n(k)$  наступления  $k$  успехов в серии из  $n$  независимых испытаний.
6. Дайте определение биномиального закона распределения. Выведите формулу для наиболее вероятного числа успехов в схеме Бернулли из  $n$  независимых испытаний. Приведите формулу полиномиального распределения.
7. Сформулируйте и докажите предельную теорему Пуассона. Выведите формулу для наиболее вероятного значения распределения Пуассона.
8. Сформулируйте понятие случайной величины и функции распределения случайной величины. Привести пример вероятностного пространства и функции на нём, которая не является случайной величиной.
9. Дайте определение функции распределения случайной величины и докажите основные свойства функции распределения. Найдите функцию распределения индикатора события.
10. Сформулируйте определение дискретной случайной величины. Выведите выражение для функции распределения дискретной случайной величины.
11. Дайте определение независимости в совокупности дискретных случайных величин. Пусть  $I_A, I_B, I_C$  — индикаторы трёх независимых событий. Показать, что  $I_A, I_B, I_C$  — независимые случайные величины.

12. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины. Может ли целочисленная случайная величина иметь математическое ожидание, равное  $\pi$ ? Ответ обосновать.
13. Сформулируйте и докажите теорему сложения для математических ожиданий.
14. Сформулируйте и докажите теорему умножения для математических ожиданий.
15. Сформулируйте и докажите неравенство Маркова.
16. Сформулируйте и докажите неравенство Чебышёва.
17. Сформулируйте определение производящей функции целочисленной неотрицательной случайной величины. Найдите производящие функции основных дискретных распределений.
18. Сформулируйте определение производящей функции целочисленной неотрицательной случайной величины. С помощью производящей функции докажите пуассоновость суммы независимых случайных величин, распределённых по закону Пуассона.
19. Дайте определение и сформулируйте основные свойства дисперсии дискретной случайной величины. Докажите одностороннее неравенство Чебышёва.
20. Сформулируйте и докажите теорему сложения для дисперсии суммы независимых случайных величин. Верно ли, что  $Var(XY) \geq Var(X)Var(Y)$  для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$ ? Ответ необходимо обосновать. Выведите формулу для дисперсии произведения двух независимых случайных величин?
21. Сформулируйте определение ковариации случайных величин и докажите основные свойства ковариации.
22. Сформулируйте определение коэффициента корреляции случайных величин и докажите основные свойства коэффициента корреляции.

23. Дайте определение некоррелированности случайных величин. Следует ли из некоррелированности независимость случайных величин? Ответ обосновать.
24. Дайте определение начального и центрального момента случайной величины. Пусть  $\nu_1, \nu_2, \dots$  — начальные, а  $\mu_1, \mu_2, \dots$  — центральные моменты некоторой случайной величины. Докажите, что  $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$ .
25. Дайте определение начального и центрального момента случайной величины. Пусть  $X$  и  $Y$  независимые случайные величины. Покажите, что
- $$\mu_4(X + Y) = \mu_4(X) + \mu_4(Y) + 6(X)(Y).$$
26. Дайте определения асимметрии и эксцесса распределения. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности асимметрии и эксцесса относительно линейной замены случайных величин.
27. Дайте определения асимметрии и эксцесса распределения. Найдите асимметрию и эксцесс равномерного распределения на отрезке  $[a; b]$ .
28. Выведите формулы для математического ожидания случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ .
29. Выведите формулы для дисперсии случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ .
30. Докажите, что для нормальной случайной величины с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$  функция распределения
- $$F(x) \equiv \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция Лапласа.}$$
31. Сформулируйте определение производящей функции моментов. С помощью производящей функции моментов докажите нормальность суммы независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону.
32. Докажите, что для непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром  $\lambda$  математическое ожидание  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .
33. Докажите, что для непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром  $\lambda$  дисперсия  $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

34. Сформулировать и доказать закон больших чисел в форме Чебышёва и Бернулли.
35. Сформулировать и доказать утверждение, известное как «общее правило  $3\sigma$ ».
36. Сформулировать центральную предельную теорему и неравенство Берри – Эссеена об оценке погрешности приближения в центральной предельной теореме.
37. Сформулировать и доказать предельную теорему Муавра – Лапласа.
38. Дайте определение распределения Коши и докажите основные свойства случайной величины, которая имеет распределение Коши с параметрами  $a$  и  $b$ .
39. Дайте определение логнормального закона распределения с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ . Приведите формулы с доказательством для математического ожидания и дисперсии случайной величины, которая имеет логнормальное распределение с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ .
40. Перечислите основные свойства функции плотности распределения двумерного случайного вектора. Каким образом связаны функции плотности и распределения? Укажите функцию плотности для равномерного распределения в области  $G \subset R$ .
41. Дайте определение плотности двумерного нормального закона распределения на плоскости. Докажите теорему об эквивалентности независимости и некоррелированности компонент  $X$  и  $Y$  двумерного нормального вектора  $(X, Y)$ .
42. Случайный вектор  $(X; Y)$  равномерно распределен в круге радиуса  $R = 1$ . Будут ли  $X$  и  $Y$ : а) независимыми; б) некоррелированными? Ответ обосновать.
43. Дайте определение свертки двух функций. Для абсолютно непрерывного случайного вектора  $(X; Y)$  найдите функцию распределения и плотность распределения суммы  $X + Y$ . Приведите выражение плотности суммы распределения в случае независимых компонент  $X$  и  $Y$ .
44. Для абсолютно непрерывного случайного вектора  $(X; Y)$  и его функционального преобразования  $(U; V)$ , где  $U = g_1(X, Y), V = g_2(X, Y)$

приведите с пояснением в обозначениях совместную плотность распределения  $f_{U,V}(u; v)$ .

45. Сформулируйте и докажите «универсальные» свойства равномерного закона распределения. Пусть  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$   $F_X(x)$  – функция распределения показательного закона,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Какому закону распределения соответствует случайная величина  $U = F_X(X)$ . Ответ обосновать.
46. Сформулируйте и докажите теорему об условной плотности двумерного нормального закона распределения.
47. Пусть  $(X, Y)$  – двумерный нормальный случайный вектор. Докажите, что из равенства  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  вытекает независимость  $X$  и  $Y$ .
48. Сформулируйте определение условного математического ожидания случайной величины  $X$  относительно случайной величины  $Y$ . Докажите формулу полного математического ожидания  $E(X) = E[E(X|Y)]$ .
49. Сформулируйте определение условной дисперсии случайной величины  $X$  относительно случайной величины  $Y$ . Докажите формулу полной дисперсии  $\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}[E(X|Y)]$ .
50. Сформулируйте определение условной ковариации случайных величин  $X$  и  $Y$  относительно случайной величины  $Z$ . Докажите формулу полной ковариации  $\text{Cov}(X, Y) = E[\text{Cov}(X, Y|Z)] + \text{Cov}[E(X|Z), E(Y|Z)]$ .
51. Пусть  $n$  человек рассаживаются в случайном порядке. Найдите вероятность, что между двумя определенными людьми окажется ровно  $k$  человек, если: а) рассаживаются в ряд; б) рассаживаются за круглый стол.
52. Докажите (с соответствующими пояснениями в формулах при выводе), что  $P(A \circ B \circ C) = P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cdot B) - 2P(A \cdot C) - 2P(B \cdot C) + 4P(A \cdot B \cdot C)$ . (Здесь через  $\circ$  обозначена симметрическая разность двух событий, т.е.  $A \circ B = (A \setminus B) + (B \setminus A)$ ).

53. Числа  $1; 2; \dots; n$  расположены наудачу. Какова вероятность того, что, по крайней мере, одно число будет равно номеру своего места? К какому пределу стремится эта вероятность при  $n \rightarrow \infty$ .
54. Выбирают наудачу один член определителя  $n$ -го порядка. Какова вероятность того, что он не содержит элементов главной диагонали? Решить задачу для а)  $n = 5$ ; б) в общем случае.
55. Рассматривается множество натуральных чисел, принадлежащих промежутку  $[2; N]$  (например,  $N = 1\,000\,000$ ). Из этого множества наудачу берется число. Найти вероятность того, что наибольший простой делитель этого числа будет больше, чем само число в степени  $\alpha$ , (например, для  $\alpha = \frac{2}{3}$ ).  
(Можно использовать «*Jupyter Notebook*» с подробным объяснением алгоритма всех вычислений и комментариев в всех строках к основному коду программы).
56. Два лица  $A$  и  $B$  условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Лицо  $A$  ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит; лицо  $B$  ждет другого в течение 12 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найдите вероятность, что а) встреча состоится; б) встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше  $a$  минут, например,  $a = 7$  минут.
57. Пусть  $n$  лиц условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более  $60 \cdot q$  минут ( $q < 1$ ). Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, покажите (со всеми формулами и пояснениями к ним), что вероятность того, что встреча состоится, определяется равенством  $P_n = nq^{n-1} - (n-1)q^n$ . Для  $n = 3$  найдите также вероятность того, что встреча по крайней мере двух лиц состоится.
58. Докажите неравенство  $P(A|B) \geq 1 - \frac{P(\bar{A})}{P(B)}$ .
59. Пусть  $m$  пассажиров (например,  $m = 6$ ) садятся на остановке в поезд, состоящий из  $k$  вагонов (например,  $k = 4$ ). Каждый из пассажиров может

сесть с одинаковой вероятностью в любой вагон. Найдите вероятность, что пассажиры сядут в один вагон при условии, что хотя бы в один вагон не сядет ни один пассажир.

60. Несимметричная игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет, например, единица. Известно, что при первом испытании единица не выпала, найдите вероятность того, что потребуется не менее  $k$  бросаний (например,  $k = 3$ ). Вероятность выпадения единицы равна, например,  $\frac{1}{10}$ .
61. Независимые случайные величины  $X, Y, Z$  могут принимать только целые значения:  $X$  – от 0 до 12 с вероятностью  $\frac{1}{13}$ ,  $Y$  – от 0 до 13 с вероятностью  $\frac{1}{14}$ , а  $Z$  только значения 3 и 7, при этом  $P(Z = 3) = \frac{9}{10}$ . Найдите: а) вероятность того, что сумма данных случайных величин будет равна 12; б) наиболее вероятное значение суммы  $X + Y + Z$  и вероятность такого события; в) распределение  $X + Y + Z$ .
62. Независимые случайные величины  $X, Y, Z$  принимают только целые значения:  $X$  – от 1 до 13 с вероятностью, пропорциональной принимаемому целому значению, т.е.  $P(X = i) = A \cdot i, i = 1, \dots, 13$ ;  $Y$  – от 1 до 12 с вероятностью также пропорционально принимаемому значению  $P(Y = j) = B \cdot j, j = 1, \dots, 12$ ;  $Z$  – от 1 до 8 с вероятностью  $P(Z = k) = C \cdot k, k = 1, \dots, 8$ . Найдите вероятность того, что  $X, Y, Z$  примут разные значения, т.е.  $P(X \neq Y, X \neq Z, Y \neq Z)$ .
63. Независимые дискретные случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$  принимают только положительные или отрицательные значения, при этом  $P(X_i > 0) = p$  (например,  $p = 0.98$ , для всех  $X_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ ). Найдите  $P(X_1 X_2 \cdots X_{2n} > 0)$ .
64. Подбрасываются четыре симметричные игральные кости (с шестью гранями). Обозначим через  $S$  сумму наибольших трех выпавших очков (например, если выпало на первой кости 1, на второй – 2, на третьей – 6, на четвертой – 1, тогда значение такой суммы составляет 9). Найдите (аналитически) математическое ожидание  $E(S)$ .



65. Найдите  $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ , где  $X$  – имеет геометрическое распределение с параметром  $p$ .
66. Пусть  $X$  – неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Покажите, что
- $$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$
67. Написано  $n$  писем, но адреса на конвертах написаны в случайном порядке. Пусть  $X_n$  – число писем, которые будут получены теми адресатами, которым они предназначались. Найдите  $E(X_n)$  и  $Var(X_n)$ .
68. Корзина содержит  $N$  пронумерованных шаров  $1; 2; \dots; N$ . Из корзины без возвращения извлекаются  $n \leq N$  шаров. Пусть  $S$  обозначает сумму номеров вынутых шаров. Найдите математическое ожидание  $E(S)$  и дисперсию  $Var(S)$  этой суммы (со всеми пояснениями к формулам).
69. Пусть  $X$  – случайная величина с конечной дисперсией. Покажите, что коэффициент корреляции случайных величин  $X$  и  $sign(X)$  является неотрицательным, т.е.  $\rho(X, sign(X)) \geq 0$ .
70. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – случайные величины, коэффициент корреляции любых двух из них равен  $\rho$ . Показать, что  $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$ .
71. Пусть  $X$  и  $Y$  дискретные случайные величины, у которых  $E(X) = E(Y) = 0$ ,  $Var(X) = Var(Y) = 1$ ,  $\rho(X, Y) = \rho$ . Покажите, что
- $$E[\max\{X^2; Y^2\}] \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$
72. Предположим, что игральная кость не является симметричной и массы в ней распределены так, что масса каждой грани пропорциональна её номеру. Несимметричная игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадут все четные цифры. Найдите математическое ожидание числа бросков.
73. Нестандартная игральная кость отличается от стандартной только тем, что вместо 6 очков на одной из ее граней выбито 3 очка (в результате имеются две грани с таким числом очков). Нестандартная игральная кость

подбрасывается 24 раза,  $S$  – сумма выпавших очков. Найдите  $As(S)$  и  $Ex(S)$ .

74. Покажите, что  $Ex(X) \geq -2$ . Приведите пример распределения, когда достигается равенство.
75. Докажите, что не существует трех случайных величин  $X, Y$  и  $Z$ , таких, что коэффициент корреляции любых двух из них равен  $-1$ .
76. Случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[0; 1]$ . Найдите плотность распределения случайной величины: а)  $Y = X^2$ ; б)  $Y = \frac{1}{X}$ ; в)  $Y = e^X$  и построить их графики.
77. Плотность распределения случайной величины  $X$  равна  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Найдите распределение случайной величины  $Y = \arctg(X)$ .
78. Случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[0; 2]$ . Найдите функцию распределения случайной величины  $Y = |X - 1|$ .
79. Случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[0; 1]$ . Найдите  $q(X; X^3)$ .
80. Случайная величина  $X$  имеет стандартное распределение Коши,  $X \sim Co(0,1)$ , то есть, плотность  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = \frac{x^2}{1+x^2}$ .
81. Случайная величина  $X$  распределена по показательному закону с параметром  $\lambda = 1$ . Найдите распределение случайной величины  $Y = [X]^2$ , где  $[x]$  обозначает целую часть  $x$ .
82. Случайная величина  $X$  имеет распределение Коши с плотностью распределения  $f(x) = \frac{b}{\pi[b^2+(x-a)^2]}$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = \frac{1}{X}$ .
83. На окружности радиуса  $R$  берут две точки с равномерным распределением. Найдите функцию распределения расстояния  $\gamma$  между ними и вычислите  $E(\gamma)$ .

84. На отрезке  $[0; T]$  наудачу бросили две точки. Пусть  $\gamma$  – расстояние между ними. Найдите функцию распределения  $\gamma$  и вычислите  $E(\gamma)$ ,  $Var(\gamma)$ ,  $v_k(\gamma) = E(\gamma^k)$ .
85. Два человека договорились встретиться в промежутке времени  $[0; T]$ . Пусть  $\tau$  – время, которое придется ждать одному из них до момента встречи. Найдите функцию распределения и вычислите  $E(\tau)$ .
86. Пусть  $S(n)$  обозначает цену акции к концу  $n$ -ой недели,  $n \geq 1$ . Известно, что отношения цен  $\frac{S(n)}{S(n-1)}$ ,  $n > 1$ , являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами  $\mu = 0,00264$  и  $\sigma = 0,0671$ . Найдите вероятность того, что  
а) цена акции будет расти подряд две недели; б) цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели; в) за три недели цена акции вырастет более, чем на 7%.
87. Для независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots$ , равномерно распределенных на отрезке  $[2, 14]$ , найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_1 + \dots + X_n < 8n - 2\sqrt{n}).$$

88. Пусть  $x_a$  – квантиль уровня  $a$ , а  $x_b$  – квантиль уровня  $b$  нормального распределения  $N(\mu, \sigma^2)$ . Выведите формулу для квантилей уровня  $q \in (0; 1)$  распределения  $N(\mu; \sigma^2)$  и с ее помощью найдите отношение  $\frac{x_a - x_b}{\sigma}$ .
89. Известно распределение дискретного случайного вектора  $(X, Y)$ :

	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

- 1) Найдите распределение случайной величины  $U = \min(4, X - Y)$  и  $(U)$ ;

2) Найдите распределение случайной величины  $V = \max(X, Y)$  и  $(V)$ ;

3) Найдите ковариацию  $(U, V)$  и коэффициент корреляции  $\rho(U, V)$ .

90. Случайный вектор  $(X, Y)$  равномерно распределен в треугольнике

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad 5x + 12y \leq 60.$$

1) Найдите значение функции распределения  $F_X(4)$ . 2) Найдите  $E(X)$ ,  $Var(X)$  и  $E(X^9Y)$ . 3) Найдите  $Cov(X, Y)$  и  $\rho(X, Y)$ .

91. Плотность распределения случайного вектора  $(X, Y)$  имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{2\pi} e^{-\frac{5}{2}x^2 - xy - x - y^2 - 2y - 1}.$$

1) Найдите  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $Var(X)$ ,  $Var(Y)$ ,  $Cov(X, Y)$  и  $\rho(X, Y)$ . 2) Найдите  $P(3X - 7Y > 4)$ .

92. Известно, что  $(X, Y) \sim N(2; 4; 5, \sigma_Y^2; \rho)$ . При каком  $\sigma_Y$ , случайные величины  $2X - 3Y$  и  $4X + 6Y$  независимы?

Для независимых нормальных случайных векторов  $(X_1, Y_1) \sim N(3; -4; 5; 7; \frac{1}{11})$  и  $(X_2, Y_2) \sim N(-2; 1; 4; 3; -\frac{1}{2})$  найдите такую константу  $\alpha$ ,

что компоненты случайного вектора  $(X_1, Y_1) + \alpha(X_2, Y_2)$  являются независимыми.

93. Пусть  $X, Y, Z$  – независимые случайные величины, равномерно распределены на  $[0; 1]$ . Найдите  $P(Z \geq XY)$ .

94. Пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  – независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром  $\lambda$ . И пусть  $V = \frac{X}{X+Y}$ . Покажите, что случайная величина  $V$  равномерно распределена на  $[0; 1]$ .

95. Пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и каждая имеет стандартное нормальное распределение. Покажите, что случайная величина

$Z = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda = 1$ .

96. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и равномерно распределены на отрезке  $[0; 1]$ . Найдите функцию распределения случайной величины  $\frac{X}{X+Y}$ .

97. Точка  $P$  равномерно распределена в круге радиуса  $R$ . Пусть  $Z$  – расстояние

от точки  $P$  до центра круга. Найдите функцию распределения  $F_Z(x)$  и

плотность распределения  $f_Z(x)$  случайной величины  $Z$ . Построить графики функций  $F_Z(x)$  и  $f_Z(x)$ . Найдите  $E(Z)$  и  $Var(Z)$ .

98. Случайные величины  $X$  и  $Y$  нормально распределены  $N(0; \sigma^2)$  и независимы. Покажите, что отношение  $Z = \frac{X}{Y}$  имеет распределение Коши.
99. Пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  – независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром  $\lambda$ . И пусть  $U = X + Y$ ,  $V = \frac{X}{X+Y}$ . Найдите плотность распределения  $f_{U,V}(x, y)$  случайного вектора  $(U, V)$ .
100. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют показательное распределение с параметром  $\lambda = 1$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $Z = |X - Y|$ .
101. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют показательное распределение с параметром  $\lambda = 1$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $Z = \frac{X}{Y}$ .
102. Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы и имеют равномерное распределение на  $[a; b]$  (например,  $[a; b] = [0; 1]$  или  $X \sim U([0; 1])$ ,  $Y \sim U([0; 2])$ ). Найдите функцию распределения  $F_Z(z)$  и плотность распределения  $f_Z(z)$  (вывести формулы с подробным пояснением в обозначениях) суммы  $Z = X + Y$ , разности  $Z = X - Y$ , произведения  $Z = XY$ , отношения  $Z = \frac{X}{Y}$  а также значение  $F_Z(c)$ , например, для  $c = \frac{2}{3}$ .

### **Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости**

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях Департамента анализа данных и машинного обучения.



## 7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

### Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
ПКН-1 Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области математики и компьютерных наук, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям	1. Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно-исследовательских задач.  2. Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов.	<b>Знать</b> основные факты, концепции и принципы теории вероятностей и математической статистики; <b>Уметь</b> строго доказывать математические утверждения теории вероятностей и математической статистики, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах;  <b>Знать</b> язык теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач с использованием математических методов;  <b>Уметь</b> применять знания теории вероятностей и математической статистики для решения практических задач; выбирать и применять математические методы и методы моделирования	Сформулируйте определение условной дисперсии случайной величины $X$ относительно случайной величины $Y$ . Докажите формулу полной дисперсии $Var(X) = E[Var(X Y)] + Var[E(X Y)]$ .  Случайные величины $X$ и $Y$ нормально распределены $N(0; \sigma^2)$ и независимы. Докажите, что отношение $Z = \frac{X}{Y}$ имеет распределение Коши.  Для трех групп финансовых показателей 1) $X_{11}, X_{12}, X_{13}$ ; 2) $X_{21}, X_{22}, X_{23}$ ; 3) $X_{31}, X_{32}, X_{33}$ найжены их значения: 1) 5, 6, 7; 2) 7, 8, 9; 3) 9, 10, 11. По данным значениям вычислите межгрупповую и среднюю групповую дисперсии. Предполагается, что: 1) все показатели независимы и нормальны с одинаковой неизвестной дисперсией $Var(X_{ij}) = \sigma^2$ ; 2) в каждой группе $E(X_{ij}) = \mu_i, i = 1, 2, 3$ . Проверьте при уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о совпадении ожидаемых

		необходимые для решения поставленных задач	значений показателей, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ .
ПКН-2 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	1. Демонстрирует знание базовых математических моделей, применяемых в различных предметных областях.	<b>Знать</b> основные понятия теории вероятностей и математической статистики; методики расчетов, используемые при анализе данных; вероятностные и статистические методы.  <b>Уметь</b> использовать инструменты описательной статистики и визуализации данных, вероятностные и статистические методы для решения профессиональных задач.	Опишите линейную модель дисперсионного анализа. Какого рода гипотезы формулируются и проверяются в этой модели?
	2. Адаптирует и применяет существующие математические модели для решения поставленной прикладной или теоретической задачи.	<b>Знать</b> вероятностные и статистические модели в области прикладного машинного обучения;  <b>Уметь</b> модифицировать математические модели в области прикладного машинного обучения;	Пусть $X_1, X_2, \dots, X_6$ и $Y_1, Y_2, Y_3$ – доходности (в базисных пунктах, б.п.) финансовых инструментов $X$ и $Y$ . Предполагается, что $X_1, X_2, \dots, X_6$ и $Y_1, Y_2, Y_3$ – независимые нормальные случайные величины с неизвестными средними $\mu_x$ и $\mu_y$ и с одинаковой неизвестной дисперсией $\sigma^2$ . По конкретным значениям доходностей $x_1, \dots, x_6$ и $y_1, y_2, y_3$ получены выборочные средние $\bar{x} = 595, \bar{y} = 588$ и несмещенные оценки дисперсии $s_x^2 = 81, s_y^2 = 51$ . При уровне значимости $0,05$ проверьте гипотезу $H_0: \mu_x = \mu_y$ против альтернативной гипотезы $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ .
	3. Владеет методологией математического моделирования для решения профессиональных задач.	<b>Знать</b> навыки решения задач в области экономики и финансов с использованием инструментария <i>Microsoft Excel, R, Python (Jupyter Notebook), Wolfram Mathematica, MATLAB</i> . <b>Уметь</b> использовать инструментальный <i>Microsoft Excel, R, Python (Jupyter Notebook)</i> ,	Инвестор наблюдает за колебаниями котировок акций компаний $A$ и $B$ в течение 100 торговых дней (по закрытию торгов). В результате наблюдений получена следующая статистика: количество дней, когда обе котировки падали – 30; обе котировки росли – 27; котировки $A$ падали, а котировки $B$ при этом росли – 23; наоборот, котировки $A$ росли, а котировки $B$ падали – 20. При 1%-м уровне

		<i>Wolfram Mathematica, MATLAB для решения задач в области прикладного машинного обучения.</i>	значимости проверьте гипотезу о равновероятности указанных четырех комбинаций падения и роста.
--	--	--	--

### Примеры практико-ориентированных(ситуационных) заданий

По данным, приведенным ниже, требуется проверить на 5%-ном уровне значимости, имеется ли существенное различие между доходностями  $Q^{(1)}$ ,  $Q^{(2)}$ ,  $Q^{(3)}$  трех акций (предполагается, что доходности акций  $Q^{(1)}$ ,  $Q^{(2)}$ ,  $Q^{(3)}$  распределены по нормальному закону):

$q_i^{(1)}$ : -0.0724514, 0.348339, 0.214579, 0.234001, 0.080152, 0.550343, 0.695598, 0.11335, 0.311405, 0.178259, 0.707557, -0.00388785, 0.311358, 0.461806, 0.175355, 0.604575, 0.0144682, 0.164384, 0.142543, 0.593697, 0.259534, 0.264568, 0.157433, 0.491485, 0.801349, 0.00482267, 0.396828, 0.367374, 0.133619, 0.523703, -0.0413555, 0.265778, 0.390005, -0.0617123, 0.274367, 0.341692, 0.318834, 0.231129, 0.116686, 0.600259, 0.57894, 0.446113, 0.273421, 0.376668, -0.0444261, 0.438477, 0.530961, 0.108338, 0.398188, 0.942436, 0.470789, 0.352353, 0.750677, 0.559233, 0.344401, 0.209402, 0.373711, 0.381037, -0.0440512, 0.307625, 0.254757, 0.240125, 0.0755683, 0.229486, 0.022751, 0.394789, 0.405517, 0.333518, 0.422884, 0.268465, 0.406002, 0.242695, 0.390111, 0.614299, 0.468193, 0.434372, 0.173573, 0.347659, 0.0771342, 0.608834, 0.0837221, 0.347069, 0.575629, 0.437637, 0.452505, 0.311783, 0.34139, 0.173038, 0.39376, 0.0118951, 0.439373, 0.105634, 0.515845, 0.0556552, 0.299372, 0.44125, 0.534503, 0.326354, 0.305192, -0.0677661

$q_i^{(2)}$ : 0.0760076, 0.276395, 0.563888, 0.459716, 0.326395, 0.25269, 0.306006, 0.389063, 0.47451, 0.465387, 0.482189, 0.233394, 0.28675, 0.013888, 0.322988, 0.0643255, 0.656926, 0.421046, 0.255888, 0.751859, 0.284468, 0.30853, 0.572919, 0.397649, 0.307229, 0.207558, 0.714226, 0.155008, 0.0934287, 0.449056, 0.48307, 0.218776, -0.0301462, 0.281453, 0.328324, 0.47907, 0.537439, 0.278841, -0.0104749, 0.542701, 0.518733, 0.417669, 0.208562, 0.654484, 0.255337, 0.149942, 0.303709, 0.20145, 0.0746767, 0.10894, -0.138775, 0.490771, 0.14104, 0.645734,

0.403321, 0.0538072, 0.630395, 0.0225026, 0.367597, 0.227261, 0.297801, 0.347481, 0.454552, 0.352614, 0.710885, 0.285879, -0.0728541, 0.191565, 0.13767, 0.0494314, 0.63165, 0.0874178, 0.473075, 0.419064, 0.356433, 0.322464, 0.390168, 0.252919, 0.750174, 0.251663, 0.631498, 0.0636435, 0.369709, 0.420973, 0.350015, 0.463658, 0.469403, 0.309336, -0.0878132, 0.491596, 0.515023, 0.505743, 0.219901, 0.578347, 0.531301, -0.152368, 0.115485, 0.615949, 0.135419, 0.407181

$q_i^{(3)}$ : 0.444592, 0.712087, 0.313076, 0.645062, 0.585544, 0.474014, 0.221915, 0.276645, 0.356567, 0.409686, 0.247493, 0.506481, 0.261083, 0.496345, 0.3712, 0.105807, 0.189129, 0.322793, 0.265872, 0.208426, 0.53622, 0.480958, 0.702705, 0.602311, 0.440274, 0.524586, 0.65099, 0.163421, 0.366639, 0.258607, 0.430439, 0.37879, 0.543402, 0.468498, 0.773798, 0.280801, 0.213493, 0.349076, 0.112629, 0.00863626, -0.0988291, 0.135398, 0.589182, 0.292923, 0.592833, -0.158578, 0.378974, 0.406636, 0.240427, 0.34263, 0.0989575, 0.172111, 0.65535, 0.747777, 0.291106, 0.358112, 0.418985, 0.418883, 0.363626, 0.23119, 0.335325, 0.474778, 0.295501, 0.586975, 0.327525, 0.708025, 0.393876, 0.267684, 0.513987, 0.294231, 0.322321, 0.556567, 0.330682, 0.36469, 0.651244, 0.654846, 0.685422, 0.535121, 0.231372, 0.181668, 0.488424, 0.166, 0.00396049, 0.314943, 0.636383, 0.305025, -0.0645144, 0.322822, 0.470865, 0.426079, 0.445955, 0.545085, -0.111493, 0.523563, 0.347434, 0.422498, 0.509299, 0.329648, 0.667257, 0.264957

### Примерные вопросы для подготовки к зачету

1. Сформулируйте формулу включений-исключений для определения вероятности суммы нескольких совместных событий. Найдите вероятность того, что в перестановке из  $n$  элементов ни один элемент не стоит на своем месте.
2. Сформулируйте аксиомы теории вероятностей и на их основе докажите свойство непрерывности вероятности.
3. Дайте определение понятий «независимость событий». Какие события называются «независимыми в совокупности». Следует ли из равенства  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$  попарная независимость. Ответ обосновать.

4. Дайте определение понятий «условная вероятность», «полная группа попарно несовместных событий». Сформулируйте и докажите теоремы, утверждающие справедливость формулы полной вероятностей и формулы полной вероятностей для математического ожидания.
5. Дайте определение схемы Бернулли. Выведите формулу для определения вероятности  $P_n(k)$  наступления  $k$  успехов в серии из  $n$  независимых испытаний.
6. Дайте определение биномиального закона распределения. Выведите формулу для наиболее вероятного числа успехов в схеме Бернулли из  $n$  независимых испытаний. Приведите формулу полиномиального распределения.
7. Сформулируйте и докажите предельную теорему Пуассона. Выведите формулу для наиболее вероятного значения распределения Пуассона.
8. Сформулируйте понятие случайной величины и функции распределения случайной величины. Привести пример вероятностного пространства и функции на нём, которая не является случайной величиной.
9. Дайте определение функции распределения случайной величины и докажите основные свойства функции распределения. Найдите функцию распределения индикатора события.
10. Сформулируйте определение дискретной случайной величины. Выведите выражение для функции распределения дискретной случайной величины.
11. Дайте определение независимости в совокупности дискретных случайных величин. Пусть  $I_A, I_B, I_C$  — индикаторы трёх независимых событий. Показать, что  $I_A, I_B, I_C$  — независимые случайные величины.
12. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины. Может ли целочисленная случайная величина имеет математическое ожидание, равное  $\pi$ ? Ответ обосновать.
13. Сформулируйте и докажите теорему сложения для математических ожиданий.

14. Сформулируйте и докажите теорему умножения для математических ожиданий.
15. Сформулируйте и докажите неравенство Маркова.
16. Сформулируйте и докажите неравенство Чебышёва.
17. Сформулируйте определение производящей функции целочисленной неотрицательной случайной величины. Найдите производящие функции основных дискретных распределений.
18. Сформулируйте определение производящей функции целочисленной неотрицательной случайной величины. С помощью производящей функции докажите пуассоновость суммы независимых случайных величин, распределённых по закону Пуассона.
19. Дайте определение и сформулируйте основные свойства дисперсии дискретной случайной величины. Докажите одностороннее неравенство Чебышёва.
20. Сформулируйте и докажите теорему сложения для дисперсии суммы независимых случайных величин. Верно ли, что  $Var(XY) \geq Var(X)Var(Y)$  для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$ ? Ответ необходимо обосновать. Выведите формулу для дисперсии произведения двух независимых случайных величин?
21. Сформулируйте определение ковариации случайных величин и докажите основные свойства ковариации.
22. Сформулируйте определение коэффициента корреляции случайных величин и докажите основные свойства коэффициента корреляции.
23. Дайте определение некоррелированности случайных величин. Следует ли из некоррелированности независимость случайных величин? Ответ обосновать.
24. Дайте определение начального и центрального момента случайной величины. Пусть  $\nu_1, \nu_2, \dots$  — начальные, а  $\mu_1, \mu_2, \dots$  — центральные моменты некоторой случайной величины. Докажите, что  $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$ .

25. Дайте определение начального и центрального момента случайной величины. Пусть  $X$  и  $Y$  независимые случайные величины. Покажите, что

$$\mu_4(X + Y) = \mu_4(X) + \mu_4(Y) + 6(X)(Y).$$

26. Дайте определения асимметрии и эксцесса распределения. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности асимметрии и эксцесса относительно линейной замены случайных величин.
27. Дайте определения асимметрии и эксцесса распределения. Найдите асимметрию и эксцесс равномерного распределения на отрезке  $[a; b]$ .
28. Выведите формулы для математического ожидания случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ .
29. Выведите формулы для дисперсии случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ .
30. Докажите, что для нормальной случайной величины с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$  функция распределения

$$F(x) \equiv \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - \text{функция Лапласа.}$$

31. Сформулируйте определение производящей функции моментов. С помощью производящей функции моментов докажите нормальность суммы независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону.
32. Докажите, что для непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром  $\lambda$  математическое ожидание  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
33. Докажите, что для непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром  $\lambda$  дисперсия  $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
34. Сформулировать и доказать закон больших чисел в форме Чебышёва и Бернулли.
35. Сформулировать и доказать утверждение, известное как «общее правило  $3\sigma$ ».
36. Сформулировать центральную предельную теорему и неравенство Берри – Эссена об оценке погрешности приближения в центральной предельной тео-

reme.



37. Сформулировать и доказать предельную теорему Муавра – Лапласа.
38. Дайте определение распределения Коши и докажите основные свойства случайной величины, которая имеет распределение Коши с параметрами  $a$  и  $b$ .
39. Дайте определение логнормального закона распределения с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ . Приведите формулы с доказательством для математического ожидания и дисперсии случайной величины, которая имеет логнормальное распределение с параметрами  $m$  и  $\sigma^2$ .
40. Перечислите основные свойства функции плотности распределения двумерного случайного вектора. Каким образом связаны функции плотности и распределения? Укажите функцию плотности для равномерного распределения в области  $G \subset R$ .
41. Дайте определение плотности двумерного нормального закона распределения на плоскости. Докажите теорему об эквивалентности независимости и некоррелированности компонент  $X$  и  $Y$  двумерного нормального вектора  $(X, Y)$ .
42. Случайный вектор  $(X; Y)$  равномерно распределен в круге радиуса  $R = 1$ . Будут ли  $X$  и  $Y$ : а) независимыми; б) некоррелированными? Ответ обосновать.
43. Дайте определение свертки двух функций. Для абсолютно непрерывного случайного вектора  $(X; Y)$  найдите функцию распределения и плотность распределения суммы  $X + Y$ . Приведите выражение плотности суммы распределения в случае независимых компонент  $X$  и  $Y$ .
44. Для абсолютно непрерывного случайного вектора  $(X; Y)$  и его функционального преобразования  $(U; V)$ , где  $U = g_1(X, Y)$ ,  $V = g_2(X, Y)$  приведите с пояснением в обозначениях совместную плотность распределения  $f_{U,V}(u; v)$ .
45. Сформулируйте и докажите «универсальные» свойства равномерного закона распределения. Пусть  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$   $F_X(x)$  – функция распределения показательного закона,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Какому закону распределения соответствует случайная величина  $U = F_X(X)$ . Ответ обосновать.

46. Сформулируйте и докажите теорему об условной плотности двумерного нормального закона распределения.
47. Пусть  $(X, Y)$  – двумерный нормальный случайный вектор. Докажите, что из равенства  $Cov(X, Y) = 0$  вытекает независимость  $X$  и  $Y$ .
48. Сформулируйте определение условного математического ожидания случайной величины  $X$  относительно случайной величины  $Y$ . Докажите формулу полного математического ожидания  $E(X) = E[E(X|Y)]$ .
49. Сформулируйте определение условной дисперсии случайной величины  $X$  относительно случайной величины  $Y$ . Докажите формулу полной дисперсии  $Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$ .
50. Сформулируйте определение условной ковариации случайных величин  $X$  и  $Y$  относительно случайной величины  $Z$ . Докажите формулу полной ковариации  $Cov(X, Y) = E[Cov(X, Y|Z)] + Cov[E(X|Z), E(Y|Z)]$ .

### Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Дайте определение случайной величины, которая имеет гамма-распределение  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ , и выведите основные свойства гамма-распределения. Запишите формулы для математического ожидания  $E(X)$  и дисперсии  $Var(X)$  гамма-распределения.
2. Дайте определение случайной величины, которая имеет  $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы. Запишите плотность  $\chi^2$ -распределения. Выведите формулы для математического ожидания  $E(X)$  и дисперсии  $Var(X)$   $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы. Найдите а)  $\mathbb{P}(\chi_{20}^2 > 10,9)$ , где  $\chi_{20}^2$  – случайная величина, которая имеет  $\chi^2$ -распределение с 20 степенями свободы; б) найдите 93% (верхнюю) точку  $\chi^2(5)$  хи-квадрат распределения с 5 степенями свободы. ( $\mathbb{P}(\chi^2 > 10,9) =$  20 0,948775;  $\chi_{0,93}^2(5) = 1,34721$ ).
3. Дайте определение случайной величины, которая имеет распределение Стьюдента с  $n$  степенями свободы Как связаны распределение Коши и

распределение Стюдента? Запишите плотность распределения Стюдента с четырьмя степенями свободы. Найдите а)  $\mathbb{P}(-2,5 \leq t_5 < -1,7)$ , где  $t_5$  – случайная величина, которая имеет распределение Стюдента с 5 степенями свободы; б) найдите 10% (верхнюю) точку  $t_{0,1}(7)$  распределения Стюдента 7 степенями свободы. ( $\mathbb{P}(-2,5 \leq t_5 < -1,7) = 0,0476933$ ;  $t_{0,1}(7) = 1,41492$ ).

4. Дайте определение случайной величины, которая имеет распределение Фишера  $F(n, m)$  с  $n$  и  $m$  степенями свободы. Запишите плотность распределения Фишера  $F(n, m)$  с  $n$  и  $m$  степенями свободы. Какой закон распределения имеет случайная величина  $\frac{1}{F}$ , если случайная величина  $F$  имеет распределение Фишера  $F(n, m)$  с  $n$  и  $m$  степенями свободы? Ответ необходимо обосновать. Найдите а)  $\mathbb{P}(3,1 \leq \frac{1}{F} < 10,7)$ , где  $F$  – случайная величина, которая имеет распределение Фишера с 3 и 5 степенями свободы,  $F \sim F(3; 5)$ ; б) найдите 5% (верхнюю) точку  $F_{0,05}(13; 4)$  распределения Фишера с 13 и 4 степенями свободы. ( $\mathbb{P}(3,1 \leq \frac{1}{F} < 10,7) = 0,150742$ ;  $F_{0,05}(13; 4) = 5,89114$ ).

5. Дайте определения процентной точки и квантили. Укажите связь между процентными точками и квантилями. Сформулируйте основные свойства процентных точек. Выведите формулу для нахождения процентной точки стандартного нормального закона распределения через функцию Лапласа  $\Phi_0(x)$ . Найдите  $\mathbb{P}(0,3 < Z^2 < 3,7)$ , если случайная величина  $Z$  имеет стандартное нормальное распределение,  $Z \sim N(0; 1)$ . ( $\mathbb{P}(0,3 < Z^2 < 3,7) = 0,52947$ ).
6. Сформулируйте определение случайной выборки из конечной генеральной совокупности. Какие виды выборок вам известны? Перечислите (с указанием формул) основные характеристики выборочной и генеральной совокупностей.
7. Сформулируйте определение случайной выборки из распределения. Как в

этом случае определяются: выборочное среднее, начальные и центральные

моменты выборки, функция распределения выборки? Что в данном контексте означает генеральное среднее?

8. Запишите формулы для математического ожидания и дисперсии выборочной доли в случае повторной (бесповторной) выборки. Поясните все используемые обозначения.
9. Сформулируйте определение выборочной функции распределения и докажите ее сходимости по вероятности к теоретической функции распределения. Выведите формулы для математического ожидания и дисперсии выборочной функции распределения.
10. Дайте определение  $k$ -ой порядковой статистики. Выведите формулы для функций распределений экстремальных статистик.
11. Что такое точечная статистическая оценка? Какие оценки называются несмещенными, состоятельными? Приведите пример оценки с минимальной дисперсией.
12. Сформулируйте и докажите достаточное условие состоятельности оценки.
13. Сформулируйте определение среднеквадратичной ошибки оценки. Какая оценка называется оптимальной? В чем заключается среднеквадратический подход к сравнению оценок?
14. Сформулируйте критерий оптимальности оценки, основанный на неравенстве Рао-Крамера.
15. Дайте определение информации по Фишеру и сформулируйте информационное неравенство Рао-Крамера.
16. Сформулируйте определение эффективной оценки по Рао-Крамеру. Найдите эффективную оценку параметра  $\theta$  для распределения Бернулли  $Bin(1, \theta)$ .
17. Докажите несмещенность, состоятельность и эффективность (в классе всех линейных несмещенных оценок) выборочного среднего  $\bar{X}$ .
18. Сформулируйте определение эффективной оценки по Рао-Крамеру. Для распределения Пуассона  $P(\lambda)$  предлагается оценка параметра  $\lambda$ :  $\hat{\lambda} = \bar{X}$ . Покажите, что эта оценка является эффективной по Рао-Крамеру.

19. Сформулируйте информационное неравенство Рао–Крамера. Исследуйте на эффективность оценку  $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{m}$  для биномиального распределения  $Bin(m; p)$ .
20. Дайте определение информации по Фишеру. Вычислите информацию Фишера для нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$  (дисперсия  $\sigma^2$  известна) и проверьте, что выборочное среднее  $\bar{X}$  является эффективной оценкой параметра  $\mu = \mathbb{E}(X)$ .
21. Дайте определение информации по Фишеру  $I(\theta)$  для одного наблюдения  $X$  и докажете формулу  $I(\theta) = -\mathbb{E}_{\theta} \left[ \frac{\partial^2 \ln f(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right]$ .
22. Как производится оценка параметров абсолютно непрерывного распределения методом максимального правдоподобия? Какой вероятностный смысл в этом случае имеет функция правдоподобия? Найдите методом максимального правдоподобия оценку параметра  $\theta$  равномерного распределения  $U([\theta; \theta + 5])$ .
23. Как производится оценка параметров распределения методом моментов? Найдите методом моментов оценку параметра  $\theta$  равномерного распределения  $U([-\theta; \theta])$ .
24. Сформулируйте определение доверительной оценки параметра с коэффициентом доверия  $\gamma$ . Какой интервал называется асимптотически доверительным. Что такое точность доверительной оценки?
25. Приведите формулы (с выводом) доверительного точного интервала для параметра сдвига  $\theta = \mu$  нормальной модели  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда параметр масштаба  $\sigma^2$  известен. Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.
26. Приведите формулы (с выводом) доверительного точного интервала для параметра масштаба  $\theta = \sigma^2$  нормальной модели  $N(\mu; \theta)$ , когда значение параметра сдвига  $\mu$  известно. Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.

27. Является ли статистика  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2$  несмещенной и эффективной (по Рао-Крамеру) точечной оценкой параметра  $\theta = \sigma^2$  для модели  $N(\mu; \theta)$ , когда  $\mu = \mathbb{E}(X)$  – известно, а  $\theta = \sigma^2$  – неизвестно? Ответ обосновать.
28. Является ли статистика  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$  несмещенной и эффективной (по Рао-Крамеру) точечной оценкой параметра  $\theta = \sigma^2$  для модели  $N(\mu; \theta)$ , когда оба параметра  $\mu = \mathbb{E}(X)$  и  $\theta = \sigma^2$  – неизвестны? Ответ обосновать.
29. Приведите формулы (с выводом) доверительного точного интервала для параметра сдвига  $\theta = \mu$  нормальной модели  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда параметр масштаба  $\sigma^2$  – неизвестен. Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.
30. Приведите формулы (с выводом) доверительного точного интервала для параметра масштаба  $\theta = \sigma^2$  нормальной модели  $N(\mu; \theta)$ , когда параметр сдвига  $\mu$  – неизвестен. Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.
31. Сформулируйте теорему Фишера. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка объема  $n$  из  $N(\mu; \sigma^2)$ . Найдите а)  $Cov(X_i - \bar{X}; \bar{X})$ ; б)  $Cov(X_i - \bar{X}; X_j - \bar{X}), i \neq j$ .
32. Приведите формулы (с выводом) доверительного точного интервала предсказания для  $X_{n+1}$  по выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  из нормальной модели  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда оба параметр  $\mu$  и  $\sigma^2$  – неизвестны. Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.
33. Дайте определение асимптотического доверительного интервала и приведите формулы (с выводом) асимптотического доверительного интервала для коэффициента корреляции  $\rho$  по выборке  $(X_1; Y_1), (X_2; Y_2), \dots, (X_n; Y_n)$  объема  $n$  из двумерной нормальной модели  $N(\mu_1; \mu_2; \sigma_1^2; \sigma_2^2; \rho)$ . Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.
34. Дайте определение асимптотического доверительного интервала и приведите формулы (с выводом) асимптотического доверительного интервала для

параметра вероятности  $\theta = p$ . Выведите уравнение доверительного эллипса.



35. Пусть  $\vec{X}_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{n_jj})$  – выборка объема  $n_j$  из  $N(\mu_j; \sigma^2)$ , где  $j = 1, \dots, k$ . Приведите формулы (с выводом) доверительного интервала для параметра  $\mu_j$ , используя в качестве несмещенной оценки параметра  $\sigma^2$  остаточную дисперсию  $\frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$ . Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.
36. Пусть  $\vec{X}_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{n_jj})$  – выборка объема  $n_j$  из  $N(\mu_j; \sigma^2)$ , где  $j = 1, \dots, k$ . Приведите формулы (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) дисперсионного тождества.
37. Пусть  $\vec{X}_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{n_jj})$  – выборка объема  $n_j$  из  $N(\mu_j; \sigma^2)$ , где  $j = 1, \dots, k$ . Дайте определение факторной дисперсии. Приведите формулу (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) математического ожидания факторной дисперсии.
38. Опишите общую схему проверки статистических гипотез. Определите понятия: критическая область, уровень значимости, мощность критерия. Какие гипотезы называются простыми (сложными)?
39. Приведите вероятностную интерпретацию ошибок первого и второго рода, а также мощности критерия в случае простых нулевой и альтернативной гипотез. Привести пример критерия с выбором критического значения  $c_0$ , для которого сумма ошибок первого и второго рода  $\alpha + \beta$  была бы минимальной.
40. Дайте определение несмещенности и состоятельности критерия. Пусть мощность критерия определяется выражением

$$W(\mu) = \frac{1}{2} - \Phi_0 \left( z_\alpha - \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\mu - \mu_0) \right), \mu \in \Theta_1 = (\mu_0; +\infty).$$

Является ли критерий с такой функцией мощности несмещенным и состоятельным? Ответ обосновать.

41. Сформулируйте лемму Неймана-Пирсона в случае проверки двух простых гипотез. Приведите пример построения наиболее мощного критерия.
42. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения

$N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X)$  – известна, проверяется на уровне значимости

$\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu = \mu_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu > \mu_0$ .

1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

43. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$  – известна, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu = \mu_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu < \mu_0$ .

1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

44. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$  – известна, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu = \mu_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu \neq \mu_0$ .

1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

45. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$  – неизвестна, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu = \mu_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu > \mu_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.
46. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$  – неизвестна, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu = \mu_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu < \mu_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.
47. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$  – неизвестна, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu = \mu_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu \neq \mu_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и

мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

48. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\mu = \mathbb{E}(X)$  – известно, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma = \sigma_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma > \sigma_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

49. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\mu = \mathbb{E}(X)$  – известно, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma = \sigma_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma < \sigma_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

50. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\mu = \mathbb{E}(X)$  – известно, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma = \sigma_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma \neq \sigma_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ .

5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

51. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\mu = \mathbb{E}(X)$  – неизвестно, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma = \sigma_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma > \sigma_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ .

5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

52. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\mu = \mathbb{E}(X)$  – неизвестно, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma = \sigma_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma < \sigma_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ .

5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

53. По выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из нормального закона распределения  $N(\mu; \sigma^2)$ , когда  $\mu = \mathbb{E}(X)$  – неизвестно, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma = \sigma_0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma \neq \sigma_0$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ .

5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

54. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$ , когда  $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$  и  $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y)$  – известны, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu_X > \mu_Y$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

55. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$ , когда  $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$  и  $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y)$  – известны, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

56. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  с неизвестными, но равными дисперсиями  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ , проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu_X > \mu_Y$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите

(с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

57. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  с неизвестными, но равными дисперсиями  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ , проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

58. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  с неизвестными и не равными дисперсиями, проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \mu_X = \mu_Y$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$  (проблема Беренса-Фишера). 1) Приведите статистику критерия Уэлча и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите основное свойство статистики критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий Уэлча: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

59. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные



свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

60. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ .

1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.

61. По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  с неизвестными, но равными дисперсиями  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ , проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза

$H_0: \mu_X = \mu_Y$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$ . 1) Приведите необходимую статистику  $F$  – критерия однофакторного дисперсионного анализа и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) обоснование равенства процентных точек  $f_\alpha(1; n + m - 2)$  распределения Фишера и  $t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n + m - 2)$  распределения Стьюдента с  $n + m - 2$  свободы.

62. Какие выборки называются однородными? Сформулируйте критерий  $\chi^2$ –Пирсона по проверке с заданным уровнем значимости  $\alpha$  гипотезы об однородности нескольких выборок. Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) статистику критерия  $\chi^2$ –Пирсона для проверки однородности двух выборок.

63. Сформулируйте критерий независимости  $\chi^2$ - Пирсона. Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) явный вид статистики критерия в случае, когда таблица сопряженности двух признаков  $X$  и  $Y$  имеет вид

	$Y = y_1$	$Y = y_2$
$X = x_1$	$a$	$b$
$X = x_2$	$c$	$d$

64. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_6$  – выборка из равномерного распределения на отрезке  $[5; 8]$ ,  $\hat{K}(x)$  – соответствующая выборочная функция распределения. Найдите: а) вероятность  $\mathbb{P}(\hat{K}(6) = \hat{K}(8))$ ; б) вероятность  $\mathbb{P}(\hat{K}(7) = \frac{1}{2})$ .

65. Имеется выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из генеральной совокупности с функцией распределения  $F(x)$ . Найдите функции распределения экстремальных статистик  $X_{(1)}$  и  $X_{(n)}$ .

66. Пусть  $X$  и  $Y$  – две независимые несмещенные оценки параметра  $\theta$  с дисперсиями  $\sigma^2$  и  $4\sigma^2$  соответственно. а) Является ли  $X^2$  несмещенной оценкой параметра  $\theta^2$ ? б) Является ли  $Z = X \cdot Y$  несмещенной оценкой параметра  $\theta^2$ ?

67. Пусть  $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n)$  оценка параметра  $\theta$ , а  $b = (\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta)$  – смещение. Доказать формулу  $\Delta = \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2$ , где  $\Delta = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$  – среднеквадратичная ошибка оценки.

68. Пусть  $X_1, X_2$  – выборка объема 2 из некоторого распределения с генеральным средним  $\theta = \mathbb{E}(X)$  и дисперсией  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ . В качестве оценки параметра  $\theta$  используется оценка вида  $\hat{\theta} = aX_1 + 2aX_2$ . Известно отношение  $\frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{3}{5}$ .

Найдите оценку с наименьшей среднеквадратической ошибкой. Является ли эта оценка несмещенной?

69. Пусть  $X_1, X_2, X_3$  – выборка из генерального распределения с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\theta = \sigma^2$ . Рассмотрим две оценки параметра  $\theta$ : а)

$$\hat{\theta} = c_1(X_1 - X_2)^2; \quad \text{б)} \quad \hat{\theta} = c_2[(X_1 - X_2)^2 + (X_1 - X_3)^2 + (X_2 - X_3)^2].$$

Найдите значения  $c_1$  и  $c_2$  такие, что оценки  $\hat{\theta}$  и  $\hat{\theta}$  являются несмещенными оценками параметра дисперсии  $\sigma^2$ .

70. Пусть  $X_1, X_2, X_3, X_4$  – выборка из  $N(\theta; \sigma^2)$ . Рассмотрим две оценки параметра  $\theta$ :  $\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{10}$ ,  $\hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + 4X_2 + 4X_3 + X_4}{10}$ . а) Покажите, что обе

оценки являются несмещенными для параметра  $\theta$ ; б) Какая из этих оценок является оптимальной?

71. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка из генерального распределения и пусть  $\theta = E(X)$ ,  $\sigma^2 = Var(X)$  – математическое ожидание и дисперсия. Рассмотрим следующие оценки параметра  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + X_n}{4} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-1}}{2(n-2)}, \quad \hat{\theta}_3 = X.$$

а) Будут ли эти оценки несмещенными для параметра  $\theta$ ? б) Какая из них является состоятельной для параметра  $\theta$ ?

72. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка из равномерного распределения  $U([0; \theta])$  с неизвестным параметром  $\theta > 0$ . Требуется оценить параметр  $\theta$ . В качестве оценки параметра  $\theta$  рассматриваются:

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}.$$

а) Будут ли оценки несмещенными? б) состоятельными? в) найдите среди них оптимальную.

73. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка из равномерного распределения  $U([0; \theta])$  с неизвестным параметром  $\theta > 0$ . Требуется оценить параметр  $\theta$ . В качестве оценки параметра  $\theta$  рассматриваются:

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \quad \hat{\theta}_2 = (n+1)X_{(1)}.$$

а) Будут ли оценки несмещенными? б) Состоятельными? в) Найти среди них оптимальную.

74. Пусть  $X$  – случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, \theta]$ . Рассмотрим выборку объема 3 и класс оценок вида  $\hat{\theta} = c \cdot \bar{X}$

неизвестного параметра  $\theta$ . Найдите такое  $c$ , чтобы: а) оценка  $\hat{\theta}$  – несмещенная; б) оценка  $\hat{\theta}$  – эффективная в рассматриваемом классе.

75. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка объема  $n$  из равномерного закона распределения на отрезке  $[-\theta; \theta]$ , где  $\theta$  – неизвестный параметр. В качестве оценки параметра  $\theta^2$  рассмотрим статистику

$$\hat{\theta} = \frac{3}{n} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2).$$

Является ли статистика  $\hat{\theta}$  несмещенной оценкой параметра  $\theta^2$ ? Ответ обосновать.

76. Пусть  $Y_k = \beta x_k + \varepsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $x_k$  – некоторые константы, а  $\varepsilon_k$  – независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\varepsilon_k \sim N(0; \sigma^2)$ . Является ли оценка  $\beta = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sum_{i=1}^n x_i}$  несмещенной оценкой параметра  $\beta$ ? Ответ обосновать.

77. Пусть  $Y_k = \beta x_k + \varepsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $x_k$  – некоторые константы, а  $\varepsilon_k$  – независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\varepsilon_k \sim N(0; \sigma^2)$ . Является ли оценка  $\beta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{\overline{x_k}}$  несмещенной оценкой параметра  $\beta$ ? Ответ обосновать.

78. В таблице представлены данные по числу сделок на фондовой бирже за квартал для 400 инвесторов:

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_i$	146	97	73	34	23	10	6	3	3	3	2

В предположении, что случайное число сделок описывается распределением Пуассона, оцените параметр  $\lambda$  методом моментов. Определите вероятность того, что число сделок за квартал будет не менее трех, применяя: а) метод моментов; б) непосредственно по таблице.

79. Пусть случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[0; 4\theta]$ . Найдите методом моментов оценку для параметра  $\theta$ . Является ли оценка а) несмещенной; б) состоятельной? Ответ обосновать.

80. Пусть случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[0; 4\theta]$ .  
Найдите методом моментов оценку для параметра  $\theta$ . Является ли оценка а) несмещенной; б) состоятельной? Ответ обосновать. Пусть случайная величина  $X$  равномерно распределена на отрезке  $[a; b]$ . Найти методом моментов оценки для параметров  $a$  и  $b$ .
81. Случайная величина  $X$  (срок службы изделия) имеет показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$ . В таблице приведены сгруппированные данные по срокам службы (в часах) для  $n = 200$  изделий:
- |       |     |     |      |      |      |      |
|-------|-----|-----|------|------|------|------|
| $x_i$ | 2,5 | 7,5 | 12,5 | 17,5 | 22,5 | 27,5 |
| $n_i$ | 133 | 45  | 13   | 6    | 2    | 1    |
- Найдите методом моментов точечную оценку неизвестного параметра  $\lambda$  показательного распределения. Оцените время, которое изделие прослужит с вероятностью 86%.
82. Известно, что доля возвратов по кредитам в банке имеет распределение  $F(x) = x^\beta$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Наблюдения показали, что в среднем она составляет 78%. Методом моментов оцените параметр  $\beta$  и вероятность того, что она опуститься ниже 67%.
83. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка объема  $n$  из распределения Пуассона с параметром  $\lambda$ :  $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  Найдите методом максимального правдоподобия по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точечную оценку неизвестного параметра  $\lambda$  распределения Пуассона.
84. Найдите методом максимального правдоподобия по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точечную оценку  $\hat{\lambda}$  неизвестного параметра  $\lambda$  показательного закона распределения, плотность которого  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ .
85. Найдите оценки параметров  $a$  и  $b$  по методу максимального правдоподобия для равномерного распределения  $U([a, b])$ .

86. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка из дискретного распределения  $\mathbb{P}(X = -1) = \theta, \mathbb{P}(X = 1) = 4\theta, \mathbb{P}(X = 2) = 2\theta, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 7\theta, \theta \in (0; \frac{1}{7})$ . Найдите

оценку параметра  $\theta$  по методу максимального правдоподобия. Является ли полученная оценка: а) несмещенной; б) состоятельной. Ответ обосновать.

87. Пусть выборка состоит из одного единственного наблюдения  $X_1$  с плотностью  $f(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}$  (плотность распределения Коши). Определите

в явном виде при разных значениях  $c$  критическое множество критерия Неймана-Пирсона для проверки гипотезы  $H_0: \theta = 0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \theta = 1$ . Найдите в явном виде критическое множество и вероятности ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  в случае, когда  $c = 1$ .

88. Пусть выборка состоит из одного единственного наблюдения  $X_1$  с плотностью  $f(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}$  (плотность распределения Коши). Определите

в явном виде при разных значениях  $c$  критическое множество критерия Неймана-Пирсона для проверки гипотезы  $H_0: \theta = 0$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \theta = 1$ . Найдите в явном виде критическое множество и вероятности ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  в случае, когда  $c = 2$ .

89. В предположении, что  $\frac{f \cdot s_w^2}{\sigma_w^2} \approx \chi^2(f)$ , приведите (с выводом и необходимыми

пояснениями в обозначениях) формулу для числа степеней свободы  $f$  вида:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\sigma_w^4} \left[ \frac{\sigma^4}{n^2(n-1)} + \frac{\sigma^4}{m^2(m-1)} \right].$$

Здесь  $s_w^2 = \frac{s^2}{n} + \frac{s^2}{m}$  – несмещенная оценка параметра  $\sigma_w^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}$ .

$$s^2 \quad s^2 \quad 2$$

90. Пусть  $f$  – оценка числа степеней свободы  $f$  вида  $f = \frac{(\frac{X}{n} + \frac{Y}{m})}{\frac{s_X^2}{n^2(n-1)} + \frac{s_Y^2}{m^2(m-1)}}$ .

Покажите, что  $\min(n-1; m-1) \leq f \leq n+m-2$ .

91. Инвестор наблюдает за колебаниями котировок акций компаний  $A$  и  $B$  в течение 100 торговых дней (по закрытию торгов). В результате наблюдений получена следующая статистика: количество дней, когда обе котировки падали – 26; обе котировки росли – 25; котировки  $A$  падали, а котировки  $B$



при этом росли – 29; наоборот, котировки А росли, а котировки В падали – 20. При 1% -м уровне значимости проверьте гипотезу о равновероятности указанных четырех комбинаций падения и роста.

92. Пассажир, приходящий в случайные моменты времени на автобусную остановку, в течение пяти поездок фиксировал время ожидания автобуса: 5.1; 3.7; 1.2; 9.2; 4.8 мин. Проверить гипотезу о том, что время ожидания равномерно распределено на отрезке  $[0; 10]$  на уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .
93. Из 300 абитуриентов, поступавших в институт, 97 человек имели оценку "5" по математике в школе и 48 получили оценку "5" на вступительных экзаменах по тому же предмету. Количество абитуриентов, имевших "5" по математике в школе и сдавших вступительный экзамен по математике на "5", составило 18 человек. С уровнем значимости  $\alpha = 0,1$  проверьте гипотезу  $H_0$  о независимости оценок "5" в школе и на экзаменах.
94. Поступающие в институт абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими: на 1-ом потоке баллы "2", "3", "4" и "5" получили соответственно 33, 43, 80 и 144 человека; соответствующие же данные для 2-ого потока таковы: 39, 35, 72 и 154. Можно ли при уровне значимости 0.1 утверждать, что оба потока однородными?
95. Случайная выборка из 395 человек была разделена по возрастному признаку, а также по тому, переключают ли люди телевизионные каналы во время просмотра передачи. Данные исследования представлены в следующей таблице:

Переключение\Возраст	"18 – 24"	"25 – 34"	"35 – 49"	"50 – 64"
Да	60	54	46	41
Нет	40	44	53	57

Используя приведенные данные, проверьте на 5% -уровне значимости гипотезу о том, что переключение каналов и возраст являются независимыми признаками Найдите  $P$ -значение критерия.

### Пример экзаменационного билета

#### Экзаменационный билет №

# Билет 1

1. (10) Приведите формулы (с выводом) доверительного точного интервала для параметра масштаба  $\theta = \sigma^2$  нормальной модели  $N(\mu; \theta)$ , когда параметр сдвига  $\mu$  – неизвестен. Является ли такой интервал симметричным по вероятности? Ответ обосновать.
2. (10) По двум независимым выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  объема  $n$  из  $N(\mu_X; \sigma_X^2)$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  объема  $m$  из  $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$  проверяется на уровне значимости  $\alpha$  основная гипотеза  $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  против альтернативной гипотезы  $H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ . 1) Приведите необходимую статистику критерия и критическое множество для проверки  $H_0$  против  $H_1$ . 2) Приведите (с доказательством) основные свойства критерия. 3) Приведите (с выводом) выражение для  $P$ -значения критерия. 4) Приведите (с выводом и необходимыми пояснениями в обозначениях) выражения для вероятности ошибки второго рода  $\beta$  и мощности критерия  $W$ . 5) Является ли критерий: а) состоятельным; б) несмещенным? Ответ обосновать.
3. (10) Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – выборка объема  $n$  из распределения  $\mathcal{L}$  с моментами  $\nu_1 = \nu_1(X) = \mathbb{E}(X)$ ,  $\mu_2 = \mu_2(X) = \sigma^2 = \text{Var}(X)$ ,  $\mu_k = \mu_k(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$ ,  $k = 3, 4$ . Покажите, что  $\mu_4(\bar{X}) = \frac{\mu_4(X)}{n^3} + \frac{3(n-1)}{n^3} \mu_2^2(X)$ .
4. (10) В группе  $\Omega$  учатся студенты:  $\omega_1, \dots, \omega_{25}$ . Пусть  $X$  и  $Y$  – 100-балльные экзаменационные оценки по математическому анализу и теории вероятностей. Оценки студента  $\omega_i$  обозначаются:  $x_i = X(\omega_i)$  и  $y_i = Y(\omega_i)$ ,  $i = 1, \dots, 25$ . Все оценки известны:  $x_1 = 67, y_1 = 79, x_2 = 82, y_2 = 73, x_3 = 80, y_3 = 80, x_4 = 86, y_4 = 94, x_5 = 94, y_5 = 89, x_6 = 61, y_6 = 41, x_7 = 47, y_7 = 51, x_8 = 79, y_8 = 95, x_9 = 60, y_9 = 56, x_{10} = 57, y_{10} = 46, x_{11} = 37, y_{11} = 41, x_{12} = 68, y_{12} = 54, x_{13} = 70, y_{13} = 76, x_{14} = 63, y_{14} = 43, x_{15} = 37, y_{15} = 40, x_{16} = 90, y_{16} = 74, x_{17} = 33, y_{17} = 54, x_{18} = 96, y_{18} = 90, x_{19} = 52, y_{19} = 38, x_{20} = 64, y_{20} = 47, x_{21} = 43, y_{21} = 43, x_{22} = 75, y_{22} = 94, x_{23} = 84, y_{23} = 93, x_{24} = 34, y_{24} = 31, x_{25} = 83, y_{25} = 97$ . Требуется найти следующие условные эмпирические характеристики: 1) ковариацию  $X$  и  $Y$  при условии, что одновременно  $X \geq 50$  и  $Y \geq 50$ ; 2) коэффициент корреляции  $X$  и  $Y$  при том же условии.
5. (10) Для трех групп финансовых показателей  $A, B, C$  проверяется гипотеза о совпадении ожидаемых значений показателей. Предполагается, что все показатели  $X_{ij}$  независимы и распределены по нормальному закону  $N(\mu_j, \sigma^2)$  с одинаковой неизвестной дисперсией  $\text{Var}(X_{ij}) = \sigma^2$ , причем для каждой группы  $\mathbb{E}(X_{ij}) = \mu_j, j = 1, 2, 3$ . 1) По данным значениям (файл ds5.9.0.csv) найдите межгрупповую и среднюю групповую дисперсии. 2) Найдите 95% доверительные интервалы для ожидаемых значений показателей  $\mu_j, j = 1, 2, 3$ . 3) Найдите значение статистики критерия  $f_0 = F_{\text{табл}}$ , критическое множество  $K_\alpha$  и на 2% уровне значимости проверьте гипотезу о совпадении ожидаемых значений показателей,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ . 4) Найдите  $P$ -значение критерия и сделайте выводы.
6. (10) Пусть  $(x_1, y_1); \dots; (x_{32}, y_{32})$  – реализация случайной выборки  $(X_1, Y_1); \dots; (X_{32}, Y_{32})$  из двумерного нормального распределения  $N(\mu_x; \mu_y; \sigma_x^2; \sigma_y^2; \rho)$ . Используя векторы  $\vec{x} = (x_1; \dots; x_{32})$  и  $\vec{y} = (y_1; \dots; y_{32})$ , постройте асимптотический 0,91-доверительный интервал  $(\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2)$  для коэффициента корреляции  $\rho$ . В ответе укажите: 1) выборочный коэффициент корреляции  $\hat{\rho}$ ; 2) верхнюю границу  $\hat{\theta}_2$  построенного доверительного интервала для  $\rho$ .  
Исходные данные:  $\vec{x} = (-0,451; -1,099; 2,091; -0,872; -0,445; 0,419; -0,022; 0,963; 0,664; 0,772; -0,523; -1,052; 0,76; 2,025; -0,771; 0,148; 0,516; -1,57; -1,013; 1,005; -1,021; 1,778; 0,952; -0,102; 1,511; -2,353; 0,2; -0,632; 1,329; -0,297; 1,135; -0,277)$ ,  $\vec{y} = (-0,927; -1,004; 1,849; -0,751; -1,114; 0,961; -0,022; 0,707; 0,416; 0,17; 0,077; -1,18; 0,878; 1,612; -0,16; 0,638; 1,047; -1,02; -0,532; 0,956; -1,619; 1,862; 0,561; -0,265; 1,131; -2,087; 0,878; 0,377; 1,616; 0,004; 1,09; -0,112)$ .

Подготовил:

*Рябов*

Рябов П.Е.

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

### **а) основная**

8.1. Соловьев, В. И. Анализ данных в экономике: теория вероятностей, прикладная статистика, обработка и визуализация данных в Microsoft Excel: учебник для направления бакалавриата "Экономика и управление" / В. И. Соловьев; Финансовый университет. - Москва: Кнорус, 2019. - 498 с. - Текст : непосредственный. - То же. – 2021. - ЭБС BOOK.ru. - URL: <https://book.ru/book/938856> (дата обращения: 22.11.2022). – Текст : электронный.

8.2. Сборник задач по курсу "Математика в экономике". В 3 ч. Ч. 3: Теория вероятностей: учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Бух. учет, анализ и аудит", "Финансы и кредит", "Налоги и налогообложение" и "Мировая экономика" / А. В. Браилов, А. С. Солодовников; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. – Москва: Финансы и статистика, 2013, 2017. - 125 с. – Текст: непосредственный.

### **б) дополнительная:**

8.3. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: учебное пособие / под ред. А. А. Свешникова. - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 446 с. - Текст : непосредственный. - То же. – 2021. - ЭБС Лань. - URL: <https://e.lanbook.com/book/168507> (дата обращения: 22.11.2022). - Текст : электронный.

## **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

9.1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. <http://portal.ufrf.ru/>.

9.2. Сайт департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий. <http://www.fa.ru/org/dep/findata/>

9.3. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>

9.4. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>

9.5. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>

9.6. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.com>

9.7. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» <https://www.biblio-online.ru/>

9.8. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» <https://e.lanbook.com/>

9.9. Деловая онлайн-библиотека Alpina Digital <http://lib.alpinadigital.ru/>

9.10. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>

## **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Самостоятельная работа студентов проходит в компьютерных классах. Организации самостоятельной работы служит календарно-тематический план изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций и практических занятий. Практические занятия проходят, как правило, в интерактивной форме. Интерактивная форма – решение лабораторных (практических) работ по тематике занятия в малых группах (2–4 студента) с использованием инструментария «*Jupyter Notebook*», «*Wolfram Mathematica*», «*MATLAB*».

## **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем**

11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:

1. Пакет офисных программ
2. Антивирус Kaspersky

11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Информационно-правовая система «Консультант Плюс».
2. Информационно-правовая система «Гарант».

3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>

4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>

11.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации - не предусмотрены.

11.4. Эконометрический пакет «R» и интерфейс «RStudio».

11.5. Библиотеки *Python* для организации работы в «*Jupyter Notebook*».

11.6. Приложения с использованием «*Wolfram Mathematica*»  
<https://demonstrations.wolfram.com/>

11.7. Программа «*MatCalc*» <https://matcalc.ru/>

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Компьютерный класс, оснащённый системой динамического проецирования. Для освоения дисциплины необходим компьютер. При этом возможно использование компьютеров в компьютерных классах университета.

Все изучаемые технологии доступны на личных компьютерах студентов.